

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Kontinualan signal
Sistem

Furijerova transformacija
Diferencijalne jednačine
Laplasova transformacija

Vremenski domen:

Signal + diferencijalne jednačine = odziv sistema
Impulsni odziv, konvolucija

Transformacioni "frekventni" domen:

Signal prikazan u "frekventnom" domen
Impulsni odziv sistema u "frekventnom" domenu
Odziv sistema u "frekventnom" domenu

Pravimo sistem koji "izvodi" diferencijalne jednačine!

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Diskretan signal
Sistem

Furijerova transformacija
Diferencne jednačine
Z transformacija

Vremenski domen:

Signal + diferencne jednačine = odziv sistema
Impulsni odziv, konvolucija

Transformacioni "frekventni" domen:

Signal prikazan u "frekventnom" domenu
Impulsni odziv sistema u "frekventnom" domenu
Odziv sistema u "frekventnom" domenu

Pravimo sistem koji "izvodi" diferencne jednačine!
Ali možemo da se igramo i u transformacionim domenima!

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Diferencna jednačina

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

Transformacioni domen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Šta je cilj?

Napraviti sistem koji vrši obradu ulaznog signala i na svom izlazu daje odgovarajući odziv

Diskretan sistem

Realizacija -> Digitalna kola
Softverski
Hardverski

Računarska efikasnost

Memorijski zahtevi

Uticao konačne dužine reči

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Postupak projektovanja i realizacije nekog diskretnog sistema sastoji se iz četiri faze:

1. U fazi zadavanja specifikacija se na osnovu analize problema zadaju amplitudska i/ili fazna karakteristika diskretnog sistema koje treba ostvariti, kao i dozvoljene tolerancije u realizaciji ovih karakteristika.
2. U fazi sinteze se određuju koeficijenti polinoma u brojiocu i imeniocu funkcije prenosa date izrazom, ili položaji polova i nula funkcije prenosa, na takav način da se zadate specifikacije ostvare sa greškom koja leži unutar dozvoljenih tolerancija.
3. U fazi realizacije vrši se izbor realizacione strukture i određivanje koeficijenata množača. Pored kriterijuma ekonomičnosti, prilikom izbora se vodi računa i o osetljivosti realizacije na konačnu tačnost predstavljanja podataka u digitalnim sistemima.
4. U fazi implementacije vrši se softverska ili hardverska realizacija funkcije prenosa određene u fazi 2, korišćenjem realizacione strukture izabrane u fazi 3.

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Otkud sada analogni filtri?

U praksi funkcija prenosa koja treba da se sintetizuje najčešće ima filtarsko svojstvo, tj. pojačava ili propušta bez slabljenja signale iz nekog opsega učestanosti, dok slabi signale iz nekog drugog opsega učestanosti, faza sinteze se obično naziva

*sinteza filtarskih funkcija ili
postupak aproksimacije*

Najčešće se sinteza **digitalnog filtra** izvodi pogodnom **transformacijom** funkcije prenosa odgovarajućeg **analognog filtra**.

1. Postupak sinteze analognih filtara (naročito propusnika niskih učestanosti) se proučava već više od pedeset godina tako da postoje razvijeni postupci sinteze za mnoge važne praktične slučajeve.
2. U mnogim važnim slučajevima polovi ili koeficijenti funkcije prenosa analognih filtara dati su eksplicitnim formulama.
3. Za slučajeve za koje ne postoje eksplicitne formule za funkciju prenosa sačinjene su opsežne tabele koje služe kao pomoć pri projektovanju.

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Karakteristike funkcije prenosa koju treba sintetizovati, ili kraće, specifikacije, zadaju se **najčešće u frekvencijskom domenu**.

Kod selektivnih funkcija prenosa, koje su poznate pod nazivom filtarske funkcije, razlikuju se

- propusni opseg
- nepropusni opseg
- prelazna zona.

U propusnom opsegu signal se u sistemu pojačava, propušta neizmenjen ili vrlo malo slabi.

U nepropusnom opsegu se signal znatno oslabljuje.

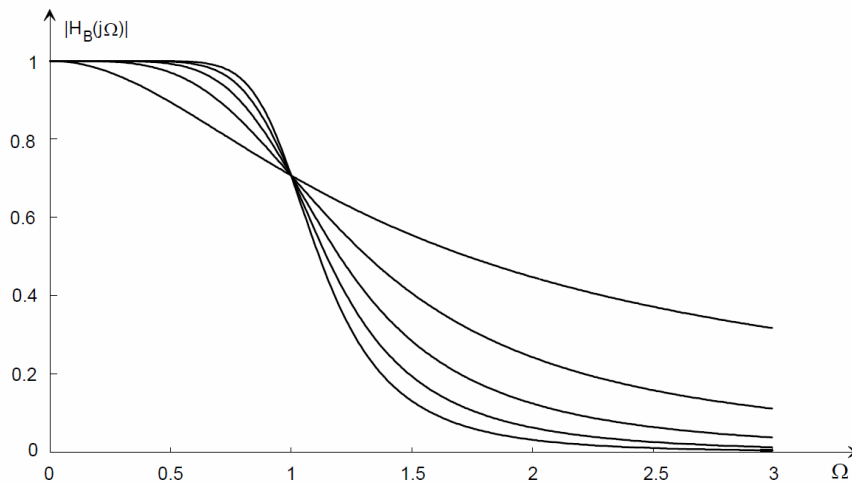
U prelaznoj zoni funkcija prenosa se ne specificira, ali se najčešće zahteva da amplitudska karakteristika bude monotono opadajuća.

Broj propusnih opsega, odnosno nepropusnih opsega može biti i veći od jedan.
Za sada 1! Sve posle može da se generalizuje.

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Primer amplitudskih karakteristika koje želimo da dobijemo



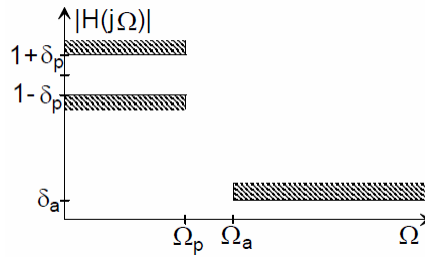
Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Da bi to dobili krećemo od:

1. Granične učestanosti propusnog opsega Ω_p
2. Granične učestanosti nepropusnog opsega Ω_a
3. Varijacija amplitude u propusnom opsegu δ_p
4. Varijacija amplitude u nepropusnom opsegu δ_a

Grafički

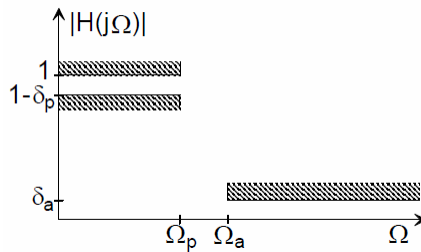


Šrafirano = ne sme

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Ako pojačanje ne sme da bude veće od 1

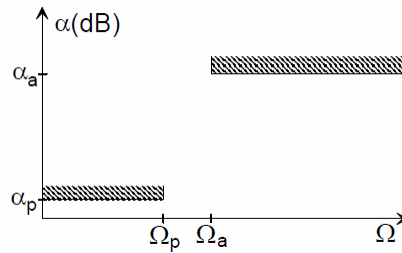


Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtera

Najčešći način zadavanja gabarita filterarskih funkcija je preko **recipročne vrednosti amplitudske karakteristike izražena u dB**, odnosno zadaje se **slabljenje**.

U tom slučaju se umesto varijacije amplitude u propusnom opsegu δ_p specificira maksimalno slabljenje u propusnom opsegu α_p , dok se umesto varijacije amplitude u nepropusnom opsegu δ_a specificira minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu α_a .



Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtera

$$1 \quad \alpha_p = 20 \log \frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p}, \quad \delta_p = \frac{10^{0.05\alpha_p} - 1}{10^{0.05\alpha_p} + 1}$$

$$2 \quad \alpha_p = 20 \log \frac{1}{1 - \delta_p}, \quad \delta_p = 1 - 10^{-0.05\alpha_p}$$

$$\alpha_a = -20 \log \delta_a, \quad \delta_a = 10^{-0.05\alpha_a}$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara

Zašto niskofrekventni filtri (NF) koji propuštaju samo niske učestanosti kada nama možda (sigurno) trebaju i
 Visokofrekventni filtri (VF), odnosno propusnici visokih učestanosti
 Propusnici opsega učestanosti (PO)
 Npropusnici opsega učestanosti (NO)

U slučaju sinteze NF filtra, mogu se dobiti eksplicitne formule za polove i nule funkcije prenosa.

Sinteza ostalih tipičnih funkcija prenosa (VF, PO, NO) vrši se najčešće transformacijom NF funkcije prenosa

Prilikom projektovanja učestanosti su najčešće normalizovane!

$$\Omega_p = 1$$

$$\omega_p = 1$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Batervortova aproksimacija

Batervortova (Butterworth) aproksimacija idealne amplitudske karakteristike NF filtra je izvedena pod pretpostavkom da je amplitudska karakteristika **maksimalno ravna u koordinatnom početku**.

$$|H_B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (\omega/\omega_p)^{2N}}$$

ε parametar koji određuje slabljenje na granici propusnog opsega $\omega = \omega_p$

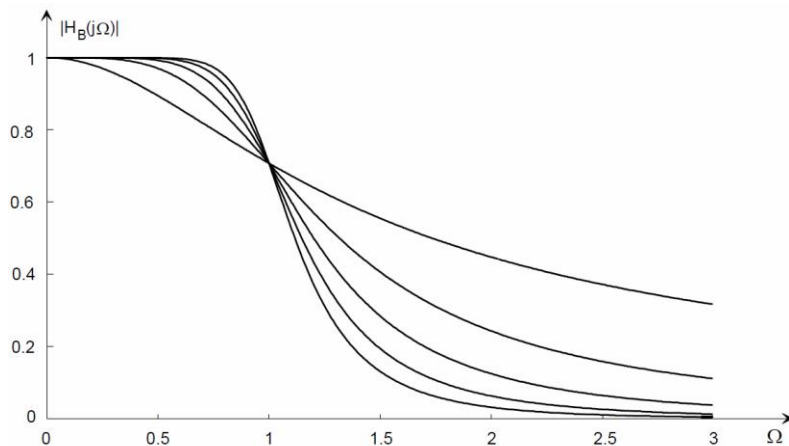
$$10 \log(1 + \varepsilon^2) = \alpha_p \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1}$$

red filtarske funkcije N

$$10 \log[1 + \varepsilon^2 (\omega_a/\omega_p)^{2N}] = \alpha_a \quad N \geq \frac{\log \frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}}{2 \log(\omega_a/\omega_p)} = \frac{\log D}{2 \log(1/k)}$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtera – Batervortova aproksimacija



Slika 8.2 Amplitudska karakteristika Batervortovog filtera za $N = 1, 2, 3, 4, 5$ i $\epsilon = 1$.

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtera – Batervortova aproksimacija

Određivanje polova

$$s = j\omega$$

$$H_B(s)H_B(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (s/j\omega_p)^{2N}}$$

$$s_k = \frac{\omega_p}{\sqrt[2N]{\epsilon}} e^{j\pi \frac{2k+N-1}{2N}} = \frac{\omega_p}{\sqrt[2N]{\epsilon}} \left[\cos\left(\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right) + j \sin\left(\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 2N$$

Zbog uslova stabilnosti, koji zahteva da svi polovi funkcije prenosa leže u levoj polovini ravni kompleksne učestanosti s , polovi funkcije $H_B(s)$ su koreni iz leve poluravni ($1 \leq k \leq N$), dok su polovi funkcije $H_B(-s)$ koreni iz desne poluravni ($N+1 \leq k \leq 2N$).

$$H_B(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}, \quad H_0 = \prod_{k=1}^N (s_k)$$

Digitalna obrada signala
Projektovanje analognih filtara – Čebiševljeva aproksimacija prve vrste

$$|H_C(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}$$

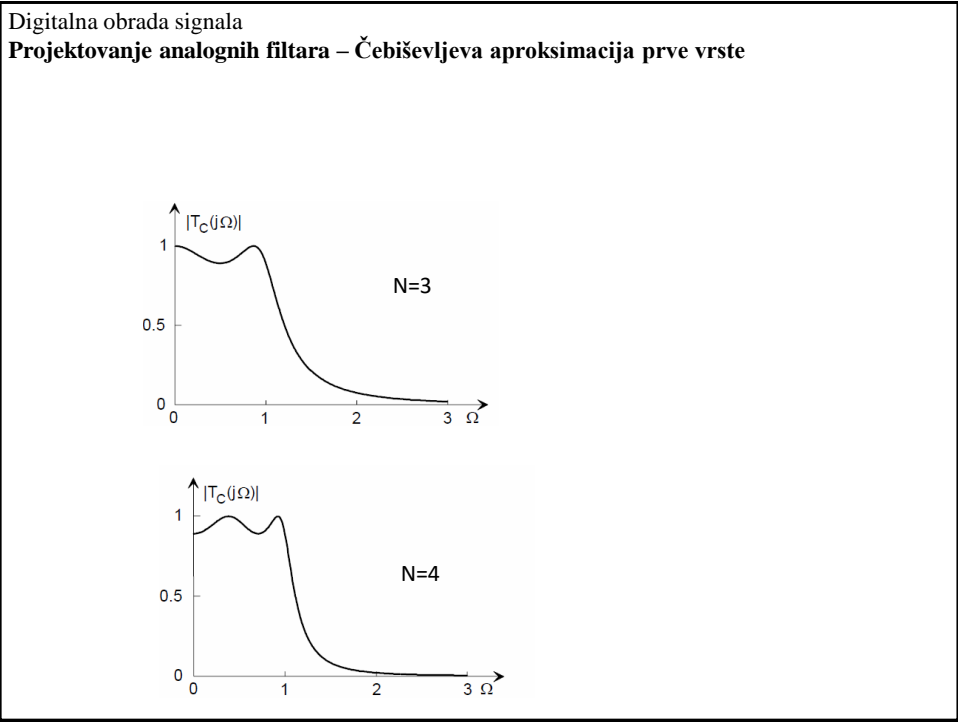
$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x) & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$T_N(1) = 1$ onda $\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1}$ Kao i kod Batervorta

$$D = \frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}$$

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_a}$$

$$N \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{D}}{\cosh^{-1}(1/k)}$$


Digitalna obrada signala
Projektovanje analognih filtara – Čebiševljeva aproksimacija prve vrste

Polovi $s_k = \sigma_k + j\omega_k$

$$\sigma_k = \sinh\left(\frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{2k + N - 1}{2N} \pi\right)$$

$$\omega_k = \cosh\left(\frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{2k + N - 1}{2N} \pi\right)$$

Funkcija prenosa

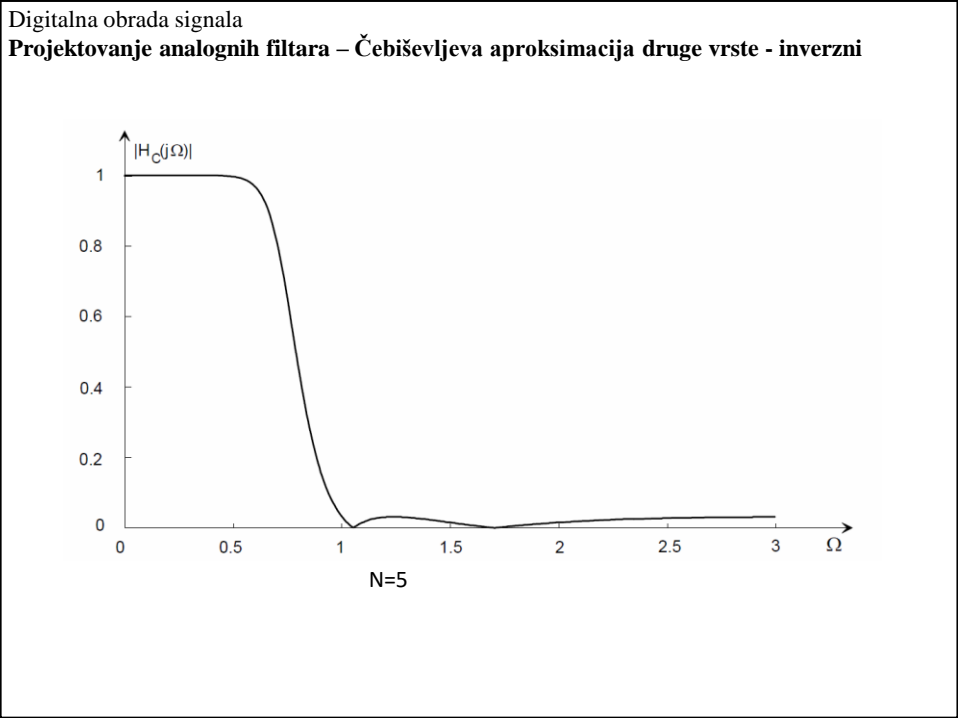
$$H_C(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}$$

$$H_0 = \begin{cases} 10^{-0.05\alpha_p} \prod_{k=1}^N (-s_k) & N \text{ parno} \\ \prod_{k=1}^N (-s_k) & N \text{ neparno} \end{cases}$$

Digitalna obrada signala
Projektovanje analognih filtara – Čebiševljeva aproksimacija druge vrste - inverzni

$$1 - |H_C(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)} = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}$$

$$|H_{IC}(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(\omega_p/\omega)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega_p/\omega)}$$



Digitalna obrada signala
Projektovanje analognih filtara – Čebiševljeva aproksimacija druge vrste - inverzni

Polovi $(s_k)_{IC} = \frac{\omega_p}{(s_k)_C}$

Funkcija prenosa

$$H_{IC}(s) = H_0 \frac{\prod_{k=1}^N (s^2 + \omega_k^2)}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}, \quad H_0 = \frac{\prod_{k=1}^N (-s_k)}{\prod_{k=1, k=2i}^N \omega_k^2}$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtera – Eliptička aproksimacija

Zajednička karakteristika Batervortove i Čebiševljeve aproksimacije je da su **odlične u nepropusnom opsegu**, ali po cenu **široke prelazne zone**.

Inverzni Čebiševljevi filteri imaju manje slabljenje u nepropusnom opsegu ali je slabljenje u gornjem delu propusnog opsega često suviše veliko.

Najbolja prelazna zona se dobija ako se greška aproksimacije idealne karakteristike ravnomerno rasporedi u propusnom i nepropusnom opsegu. Rezultujuća amplitudska karakteristika **ima oscilatorni karakter i u propusnom i u nepropusnom opsegu**.

Takva aproksimacija naziva se **eliptička aproksimacija** jer se u postupku sinteze koriste **eliptičke funkcije**, ili **Kauerova aproksimacija**, prema autoru (Cauer) koji ju je prvi formulisao.

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtera – Eliptička aproksimacija

$$|H_E(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\omega/\omega_p)}$$

Čebiševljeva racionalna funkcija

$$C_N(x) = Kx \frac{(x^2 - \omega_{z1}^2)(x^2 - \omega_{z2}^2) \cdots (x^2 - \omega_{zL}^2)}{(x^2 - \omega_{p1}^2)(x^2 - \omega_{p2}^2) \cdots (x^2 - \omega_{pL}^2)}$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Eliptička aproksimacija

Red filtra

$$N \geq \frac{\log 16D}{\log(1/q)}$$

$$D = \frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}$$

$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_a}$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Eliptička aproksimacija

Funkcija prenosa

$$H_E(s) = \frac{H_0}{D_0(s)} \prod_{i=1}^r \frac{s^2 + A_{0i}}{s^2 + B_{1i}s + B_{0i}}$$

$$r = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & N \text{ neparno} \\ \frac{N}{2} & N \text{ parno} \end{cases} \quad D_0(s) = \begin{cases} s + \sigma_0 & N \text{ neparno} \\ 1 & N \text{ parno} \end{cases}$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Eliptička aproksimacija

$$\sigma_0 = \left| \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sinh[(2m+1)\Lambda]}{1 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cosh 2m\Lambda} \right|$$

$$\Lambda = \frac{1}{2N} \ln \frac{10^{0.05\alpha_p} + 1}{10^{0.05\alpha_p} - 1}$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Eliptička aproksimacija

$$B_{oi} = \frac{(\sigma_0 V_i)^2 + (\omega_i W)^2}{(1 + \sigma_0^2 \omega_i^2)^2} \quad B_{li} = \frac{2\sigma_0 V_i}{1 + \sigma_0^2 \omega_i^2}$$

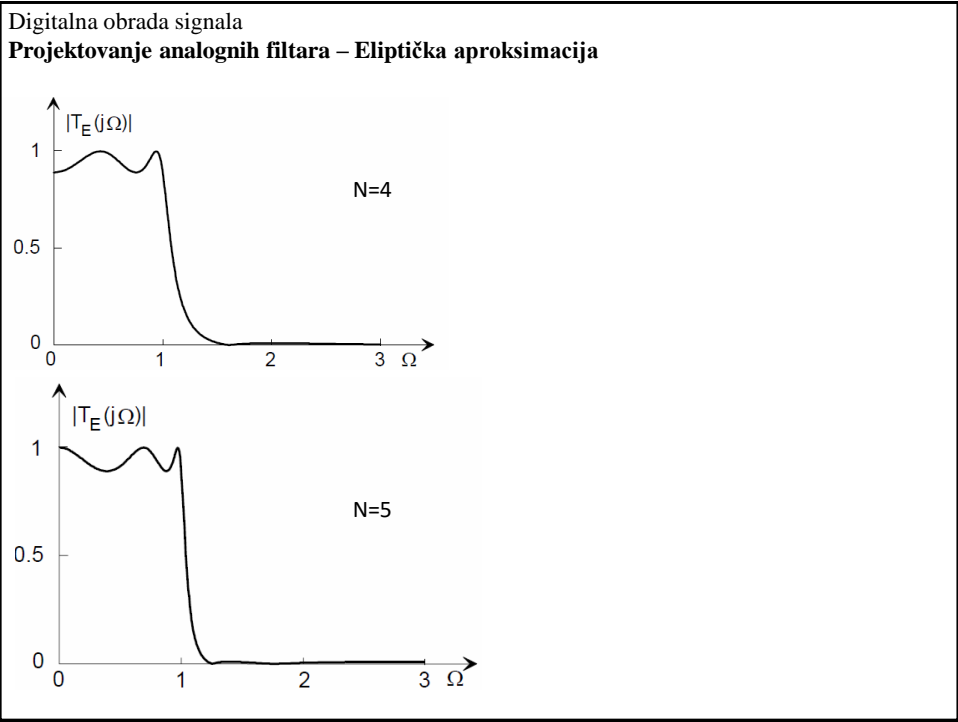
$$W = \sqrt{(1 + k\sigma_0^2) \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)}$$

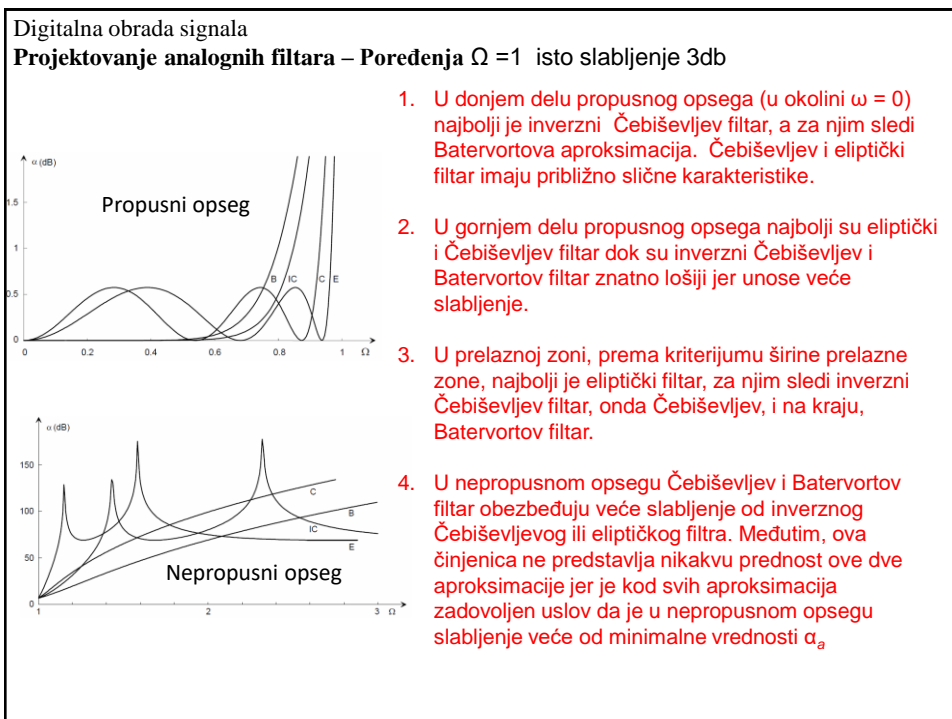
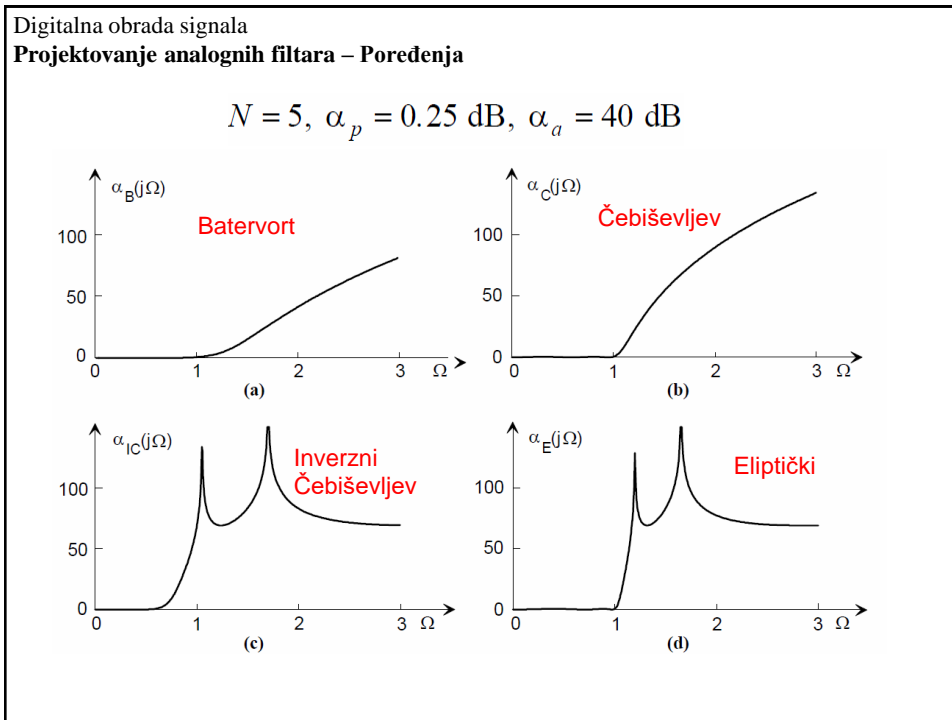
$$\omega_i = \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin \frac{(2m+1)\pi\mu}{N}}{1 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q \cos \frac{2m\pi\mu}{N}}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\mu = \begin{cases} i & N \text{ neparno} \\ i - \frac{1}{2} & N \text{ parno} \end{cases} \quad V_i = \sqrt{(1 - k\omega_i^2) \left(1 - \frac{\omega_i^2}{k}\right)}$$

Digitalna obrada signala
Projektovanje analognih filtara – Eliptička aproksimacija

$$H_0 = \begin{cases} \sigma_0 \prod_{i=1}^r \frac{B_{0i}}{A_{0i}} & N \text{ neparno} \\ 10^{-0.05\alpha_p} \prod_{i=1}^r \frac{B_{0i}}{A_{0i}} & N \text{ parno} \end{cases}$$

$$A_{0i} = \frac{1}{\omega_i^2}$$




Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Poređenja

Vrlo važnu karakteristiku funkcije prenosa predstavlja *Q faktor kritičnog para polova*

Kritičnim parom polova podrazumeva se onaj koji je najbliži imaginarnoj osi.

Ova karakteristika je važna zbog toga što su za realizaciju većeg *Q faktora potrebne kvalitetnije* komponente (sa manjim gubicima u pasivnoj tehnologiji i manjim tolerancijama u aktivnoj tehnologiji).

U slučaju digitalnih filtara, veći *Q faktor zahteva veći broj bita u digitalnoj reči*.

U pogledu Q faktora, najbolji je Batervortov filter, obe vrste Čebiševljevih filtara su identične, dok je eliptički filter najgori.

$$Q_k = -\frac{\sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2}}{2\sigma_k}$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Poređenja

Što se tiče jednostavnosti realizacije, u svim tehnologijama je jednostavnije realizovati polinomske filtre (čija funkcija prenosa nema nule) kakvi su Batervortov i Čebiševljev, jer je potreban manji broj elemenata u analognim realizacijama ili manji broj množača u digitalnoj realizaciji.

U pogledu odstupanja od linearnosti fazne karakteristike, odnosno odstupanja karakteristike grupnog kašnjenja od konstante, najbolji je Batervortov filter, za njim sledi inverzni Čebiševljev filter, dok Čebiševljev i eliptički filter imaju znatno lošije karakteristike naročito u gornjem delu propusnog opsega???

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Poređenja

Druga vrsta poređenja različitih metoda aproksimacije amplitudske karakteristike može se izvesti tako što se određuje **minimalni red funkcije koja zadovoljava traženi gabarit.**

Neka je potrebno odrediti funkciju prenosa koja zadovoljava karakteristike:

$$\Omega_p = 1 \text{ p}, \Omega_a = 1.5 \text{ a}, \alpha_p = 0.5 \text{ dB}, \alpha_a = 50 \text{ dB.}$$

Red funkcije prenosa koja zadovoljava tražene zahteve mora biti

Batervort $N = 17$

Čebiševljev $N = 8$

Inverzni Čebiševljev $N = 8$

Eliptički $N = 5$

Eliptička aproksimacija daje rešenje najnižeg reda, koje je najčešće i najekonomičnije za realizaciju. **Loša fazna karakteristika.???**

Digitalna obrada signala

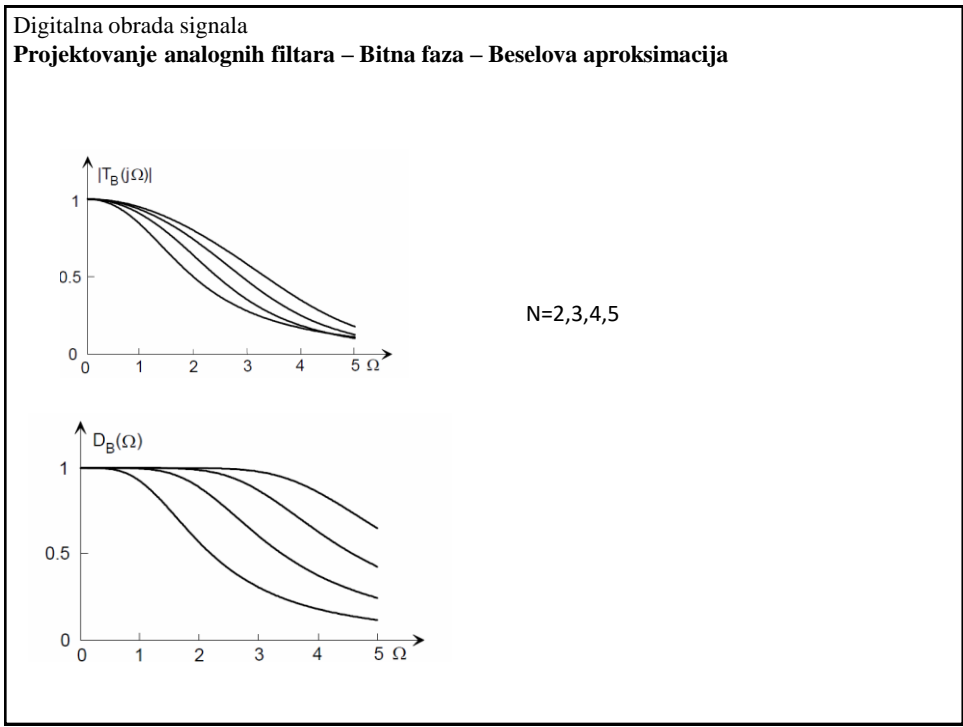
Projektovanje analognih filtara – Bitna faza – Beselova aproksimacija

Linearna faza = konstantno grupno kašnjenje

$$H(s) = \frac{B_0}{\sum_{i=0}^N B_i s^i} = \frac{B_0}{s^N B(1/s)}$$

Beselov polinom

$$B_i = \frac{(2N - i)!}{2^{N-i} i! (N - i)!}$$



Digitalna obrada signala
Projektovanje analognih filtera – Transformacije učestanosti

$s = f(\hat{s})$ s pre transformacije; ono što figuriše u funkcijama prenosa
 \hat{s} posle transformacije

NF -> NF

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (s - z_i)}{\prod_{i=0}^N (s - p_i)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M z_i\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{s}{z_i} - 1\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N p_i\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{s}{p_i} - 1\right)\right)}$$

$s = a\hat{s}$

$$H(\hat{s}) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (a\hat{s} - z_i)}{\prod_{i=0}^N (a\hat{s} - p_i)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M a\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\hat{s} - \frac{z_i}{a}\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N a\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\hat{s} - \frac{p_i}{a}\right)\right)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M z_i\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{\hat{s}}{z_i/a} - 1\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N p_i\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{\hat{s}}{p_i/a} - 1\right)\right)}$$

$$\hat{\omega}_p = \frac{\omega_p}{a} \Rightarrow \hat{\omega}_a = \frac{\omega_a}{a} \Rightarrow \hat{\omega}_a - \hat{\omega}_p = \frac{\omega_a - \omega_p}{a}$$

← obrnuto

$$\omega_p = 1 \quad a = \frac{\omega_p}{\hat{\omega}_p} \Rightarrow \omega_a = a\hat{\omega}_a \Rightarrow \omega_a - \omega_p = a(\hat{\omega}_a - \hat{\omega}_p)$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Transformacije učestanosti

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (s - z_i)}{\prod_{i=0}^N (s - p_i)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M z_i\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{s}{z_i} - 1\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N p_i\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{s}{p_i} - 1\right)\right)}$$

NF -> VF

$$s = \frac{a}{\hat{s}}$$

$$H(\hat{s}) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M \left(\frac{a}{\hat{s}} - z_i\right)}{\prod_{i=0}^N \left(\frac{a}{\hat{s}} - p_i\right)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \left(-\frac{a}{\hat{s}}\right)\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{\hat{s}}{a/z_i} - 1\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \left(-\frac{a}{\hat{s}}\right)\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{\hat{s}}{a/p_i} - 1\right)\right)} = H_0 \left(\left(-\frac{\hat{s}}{a}\right)^{N-M}\right) \frac{\left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{\hat{s}}{a/z_i} - 1\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{\hat{s}}{a/p_i} - 1\right)\right)}$$

$$= H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \left(-\frac{1}{\hat{s}}\right)\right) \left(\prod_{i=0}^M z_i\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\hat{s} - \frac{a}{z_i}\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \left(-\frac{1}{\hat{s}}\right)\right) \left(\prod_{i=0}^N p_i\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\hat{s} - \frac{a}{p_i}\right)\right)} = H_0 \left(\left(-\hat{s}\right)^{N-M}\right) \frac{\left(\prod_{i=0}^M z_i\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\hat{s} - \frac{a}{z_i}\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N p_i\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\hat{s} - \frac{a}{p_i}\right)\right)}$$

$$\hat{\omega}_p = \frac{a}{\omega_p} \quad \hat{\omega}_a = \frac{a}{\omega_a}$$

← obrnuto $\omega_p = 1$

$$a = \hat{\omega}_p \omega_p \Rightarrow \omega_a = \frac{a}{\hat{\omega}_a} \Rightarrow \omega_a - \omega_p = a \frac{\hat{\omega}_a - \hat{\omega}_p}{\hat{\omega}_p \hat{\omega}_a}$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Transformacije učestanosti

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (s - z_i)}{\prod_{i=0}^N (s - p_i)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M z_i\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{s}{z_i} - 1\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N p_i\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{s}{p_i} - 1\right)\right)}$$

NF -> PO

$$s = \frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}}$$

$$H(\hat{s}) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M \left(\frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}} - z_i\right)}{\prod_{i=0}^N \left(\frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}} - p_i\right)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \frac{1}{B\hat{s}}\right) \left(\prod_{i=0}^M (\hat{s}^2 - \hat{s}Bz_i + \omega_0^2)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \frac{1}{B\hat{s}}\right) \left(\prod_{i=0}^N (\hat{s}^2 - \hat{s}Bp_i + \omega_0^2)\right)} =$$

$$= H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \frac{1}{B\hat{s}}\right) \left(\prod_{i=0}^M (\hat{s} - z_{i1})(\hat{s} - z_{i2})\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \frac{1}{B\hat{s}}\right) \left(\prod_{i=0}^N (\hat{s} - p_{i1})(\hat{s} - p_{i2})\right)} = H_0 \left((B\hat{s})^{N-M}\right) \frac{\left(\prod_{i=0}^M (\hat{s} - z_{i1})(\hat{s} - z_{i2})\right)}{\left(\prod_{i=0}^N (\hat{s} - p_{i1})(\hat{s} - p_{i2})\right)}$$

$$x_i \Rightarrow x_{i1,2} = \frac{1}{2} \left(Bx_i \pm \sqrt{(Bx_i)^2 - 4\omega_0^2} \right) = \frac{B}{2} \left(x_i \pm \sqrt{x_i^2 - \frac{4\omega_0^2}{B^2}} \right) \Rightarrow x_{i1} + x_{i2} = Bx_i \Rightarrow x_{i1}x_{i2} = \omega_0^2$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Transformacije učestanosti

Ne zaboraviti negativne učestanosti

$$s = \frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}} \Rightarrow j\omega = \frac{(j\hat{\omega})^2 + \omega_0^2}{Bj\hat{\omega}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{B} \frac{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}}$$

$$s = \frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}} \Rightarrow -j\omega = \frac{(j\hat{\omega})^2 + \omega_0^2}{Bj\hat{\omega}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{B} \frac{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2}{\hat{\omega}}$$

$$\omega_p \Rightarrow \hat{\omega}_{p1} \Rightarrow \hat{\omega}_{p1}^2 + B\omega_p\hat{\omega}_{p1} - \omega_0^2 \Rightarrow \hat{\omega}_{p1} = \frac{1}{2} \left(-B\omega_p \pm \sqrt{(B\omega_p)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\omega_p \Rightarrow \hat{\omega}_{p2} \Rightarrow \hat{\omega}_{p2}^2 - B\omega_p\hat{\omega}_{p2} - \omega_0^2 \Rightarrow \hat{\omega}_{p2} = \frac{1}{2} \left(+B\omega_p \pm \sqrt{(B\omega_p)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{p1,2} = \frac{1}{2} \left(\pm B\omega_p + \sqrt{(B\omega_p)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{a1,2} = \frac{1}{2} \left(\pm B\omega_a + \sqrt{(B\omega_a)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1} = B\omega_p \quad \hat{\omega}_{p1}\hat{\omega}_{p2} = \omega_0^2$$

$$\hat{\omega}_{a2} - \hat{\omega}_{a1} = B\omega_a \quad \hat{\omega}_{a1}\hat{\omega}_{a2} = \omega_0^2$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Transformacije učestanosti

← obrnuto

$$\omega_p = 1$$

$$\omega_0^2 = \hat{\omega}_{p1}\hat{\omega}_{p2}$$

$$\omega_p = \frac{\hat{\omega}_{p2}^2 - \omega_0^2}{B\hat{\omega}_{p2}} = \frac{\omega_0^2 - \hat{\omega}_{p1}^2}{B\hat{\omega}_{p1}} \Rightarrow B = \frac{\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1}}{\omega_p}$$

$$\omega_a = \frac{\hat{\omega}_{a2}^2 - \omega_0^2}{B\hat{\omega}_{a2}} = \frac{\omega_0^2 - \hat{\omega}_{a1}^2}{B\hat{\omega}_{a1}} = \frac{1}{B} (\hat{\omega}_{a2} - \hat{\omega}_{a1})$$

Digitalna obrada signala
Projektovanje analognih filtara – Transformacije učestanosti

NF -> NO

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M (s - z_i)}{\prod_{i=0}^N (s - p_i)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M z_i\right) \left(\prod_{i=0}^M \left(\frac{s}{z_i} - 1\right)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N p_i\right) \left(\prod_{i=0}^N \left(\frac{s}{p_i} - 1\right)\right)}$$

$$s = \frac{B\hat{s}}{\hat{s}^2 + \omega_0^2}$$

$$H(\hat{s}) = H_0 \frac{\prod_{i=0}^M \left(\frac{B\hat{s}}{\hat{s}^2 + \omega_0^2} - z_i\right)}{\prod_{i=0}^N \left(\frac{B\hat{s}}{\hat{s}^2 + \omega_0^2} - p_i\right)} = H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \left(-\frac{1}{\hat{s}^2 + \omega_0^2}\right)\right) \left(\prod_{i=0}^M (\hat{s}^2 z_i - \hat{s}B + \omega_0^2 z_i)\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \left(-\frac{1}{\hat{s}^2 + \omega_0^2}\right)\right) \left(\prod_{i=0}^N (\hat{s}^2 p_i - \hat{s}B + \omega_0^2 p_i)\right)}$$

$$= H_0 \frac{\left(\prod_{i=0}^M \left(-\frac{1}{\hat{s}^2 + \omega_0^2}\right)\right) \left(\prod_{i=0}^M (\hat{s} - z_{i1})(\hat{s} - z_{i2})\right)}{\left(\prod_{i=0}^N \left(-\frac{1}{\hat{s}^2 + \omega_0^2}\right)\right) \left(\prod_{i=0}^N (\hat{s} - p_{i1})(\hat{s} - p_{i2})\right)} = H_0 \left((-\hat{s}^2 + \omega_0^2) \right)^{N-M} \frac{\left(\prod_{i=0}^M (\hat{s} - z_{i1})(\hat{s} - z_{i2})\right)}{\left(\prod_{i=0}^N (\hat{s} - p_{i1})(\hat{s} - p_{i2})\right)}$$

$$x_i \Rightarrow x_{i1,2} = \frac{1}{2x_i} \left(B \pm \sqrt{B^2 - 4x_i^2 \omega_0^2} \right) = \frac{B}{2} \left(\frac{1}{x_i} \pm \sqrt{\frac{1}{x_i^2} - \frac{4\omega_0^2}{B^2}} \right) \Rightarrow x_{i1} + x_{i2} = \frac{B}{x_i} \Rightarrow x_{i1} x_{i2} = \omega_0^2$$

Digitalna obrada signala
Projektovanje analognih filtara – Transformacije učestanosti

Ne zaboraviti negativne učestanosti

$$s = \frac{B\hat{\omega}}{\hat{\omega}^2 + \omega_0^2} \Rightarrow j\omega = \frac{Bj\hat{\omega}}{(j\hat{\omega})^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \omega = B \frac{\hat{\omega}}{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2}$$

$$s = \frac{B\hat{\omega}}{\hat{\omega}^2 + \omega_0^2} \Rightarrow -j\omega = \frac{Bj\hat{\omega}}{(j\hat{\omega})^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \omega = B \frac{\hat{\omega}}{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_p \Rightarrow \hat{\omega}_{p1} \Rightarrow \hat{\omega}_{p1}^2 \omega_p - B\hat{\omega}_{p1} - \omega_p \omega_0^2 \Rightarrow \hat{\omega}_{p1} = \frac{1}{2\omega_p} \left(-B \pm \sqrt{B^2 + 4\omega_p^2 \omega_0^2} \right)$$

$$\omega_p \Rightarrow \hat{\omega}_{p2} \Rightarrow \hat{\omega}_{p2}^2 \omega_p + B\hat{\omega}_{p2} - \omega_p \omega_0^2 \Rightarrow \hat{\omega}_{p2} = \frac{1}{2\omega_p} \left(+B \pm \sqrt{B^2 + 4\omega_p^2 \omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{p1,2} = \frac{1}{2\omega_p} \left(\pm B + \sqrt{B^2 + 4\omega_p^2 \omega_0^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\pm B/\omega_p + \sqrt{(B/\omega_p)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{a1,2} = \frac{1}{2\omega_p} \left(\pm B + \sqrt{B^2 + 4\omega_a^2 \omega_0^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\pm B/\omega_a + \sqrt{(B/\omega_a)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

$$\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1} = B/\omega_p \quad \hat{\omega}_{p1} \hat{\omega}_{p2} = \omega_0^2$$

$$\hat{\omega}_{a2} - \hat{\omega}_{a1} = B/\omega_a \quad \hat{\omega}_{a1} \hat{\omega}_{a2} = \omega_0^2$$

Digitalna obrada signala

Projektovanje analognih filtara – Transformacije učestanosti

← obrnuto

$$\omega_p = 1$$

$$\omega_0^2 = \hat{\omega}_{p1} \hat{\omega}_{p2}$$

$$\omega_p = \frac{B \hat{\omega}_{p1}}{\omega_0^2 - \hat{\omega}_{p1}^2} = \frac{B \hat{\omega}_{p2}}{\hat{\omega}_{p2}^2 - \omega_0^2} \Rightarrow B = \omega_p (\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1})$$

$$\omega_a = \frac{B \hat{\omega}_{a1}}{\omega_0^2 - \hat{\omega}_{a1}^2} = \frac{B \hat{\omega}_{a2}}{\hat{\omega}_{a2}^2 - \omega_0^2} = \frac{B}{(\hat{\omega}_{a2} - \hat{\omega}_{a1})}$$